مبانی ریاضی مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۲ اسفند ۱۴۰۱

۱ مقدمه

دراین درس با ریاضیات مورد نیاز برای فهم چارچوب نظری مکانیک کوانتومی آشنامی شویم. نخست فضاهای برداری بابعد محدود را بررسی می کنیم و سپس به فضاهای برداری بی نهایت بعدی خواهیم پرداخت که این قسمت در ضمیمه ها نوشته شده است زیرا فهمیدن آن برای درک بقیه فصل ها ضروری نیست. بنابراین خواننده می تواند از خواندن ضمیمه ها صرف نظر کند.

۲ فضای برداری

مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان اعداد F می گوییم هرگاه دو عمل زیر تعریف شده

$$+\ : V\times V\longrightarrow V \qquad \text{و} \qquad . : F\times V\longrightarrow V \tag{۱}$$

ودارای خاصیت های زیر باشند:

$$A1: \qquad x+y=y+x$$

$$A2: \qquad (x+y)+z=x+(y+z)$$

$$A3: \quad \exists 0 \in V \mid \quad 0 + x = x$$
$$A4: \quad \forall x \in V \quad \exists -x \in V \mid \quad -x + x = 0,$$

$$M1: \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$
$$M2: \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$
$$M3: \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$
$$M4: \quad 1x = x. \qquad (۲)$$

بسته به این که F میدان اعداد حقیقیِ R یامیدان اعداد مختلطِ C باشد، فضای برداری V را فضای برداری حقیقی یا مختلط می گوییم.

مثال ها: مجموعه های زیر هرکدام یک فضای برداری هستند.

۱ ـ R^n یا مجموعه n تایی های مرتب حقیقی،

۲ ـ C^n یامجموعه n تایی مرتب مختلط،

۳ ـ $M_{m\times n}(F)$ یامجموعه ماتریس های $m \times n$ که درایه های آن عناصریک میدان F هستند،

۴ ـ $P_n([a,b])$ یا مجموعه چندجمله های های حقیقی مرتبه n ازمتغیر x که درفاصله $[a,b]$ تعریف شده‌اند ،

۵ ـ $C^k[a,b]$ یا مجموعه توابع حقیقی یا مختلط k بارمشتق پذیردرفاصله $[a,b]$.

ازاین به بعد منحصراً با فضاهای برداری مختلط کارمی کنیم.

تعریف: هرگاه V یک فضای برداری و $W \subset V$ زیرمجموعه ای ازآن باشد، آنگاه W رایک زیرفضای V می گوییم اگر W نسبت به جمع

بردارها و ضرب اعداد دربردارها بسته باشد.

۳ ضرب داخلی و اندازه

تعریف: دریک فضای برداری V یک عمل دوتایی $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow C$ رایک ضرب داخلی می نامیم هرگاه درشرایط زیرصدق کند:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y+\alpha z\rangle = \langle x, y\rangle + \alpha\langle x, z\rangle \\
&\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^* \\
&\langle x, x\rangle \geq 0 \\
&\langle x, x\rangle = 0 \longrightarrow x = 0.
\end{aligned} \tag{۳}$$

مثالهایی از ضرب داخلی:

الف ـ در C^n:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \tag{۴}$$

ب ـ در $M_{n,m}$

$$\langle A, B\rangle := tr(AB^\dagger) \tag{۵}$$

ج ـ در $C^k[a,b]$.

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f^*(x) g(x) dx. \tag{۶}$$

فضایی را که به یک ضرب داخلی مجهزشده باشد یک فضای بردای ضرب داخلی یا $Inner\ \ product\ \ space$ می گوییم.

قضیه کوشی_شوارتز: دریک فضای ضرب داخلی داریم:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle. \quad (۷)$$

اثبات: بردار $v := \alpha x + y$ را درنظرمی گیریم. داریم

$$f(\alpha,\alpha^*) := \langle v,v\rangle \ge 0 \longrightarrow \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle \ge 0$$
$$\longrightarrow |\alpha|^2\langle x,x\rangle + \alpha^*\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \ge 0. \quad (۸)$$

هرگاه کمینه تابع f راپیداکنیم به نامساوی کوشی شوارتز می رسیم.

اندازه یک بردار:

درهرفضای ضرب داخلی می توان اندازه یک بردار را به شکل زیرتعریف کرد:

$$|x| := \sqrt{\langle x,x\rangle}. \quad (۹)$$

باتوجه به نامساوی کوشی شوارتز می توان نوشت :

$$|\langle x,y\rangle| \le |x||y|. \quad (۱۰)$$

مثال هایی ازاندازه یک بردار:

الف ـ C^n:

$$|x|^2 := \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i \quad (۱۱)$$

ب ـ در $M_{n,m}$

$$|A|^2 := tr(AA^\dagger) \quad (۱۲)$$

ج ـ در $C^k[a,b]$.

$$|f| := \int_a^b f^*(x)f(x)dx. \quad (۱۳)$$

ازنامساوی کوشی شوارتز دو نتیجه مهم حاصل می شود. یکی تعریف زاویه بین دو بردار به صورت

$$\cos\phi := \frac{|\langle x,y\rangle|}{|x||y|} \quad (۱۴)$$

ودیگری نامساوی مثلث:

$$|x+y|\langle|x|+|y|. \quad (۱۵)$$

فضای نُرم دار یا اندازه دار: یک فضای برداری V که درآن نگاشت $R \longrightarrow V : ||\;\;||$ تعریف شده باشد را فضای اندازه دار یا $Normed\ \ Space$ می گوییم هرگاه شرایط زیربرقرارباشند:

$$\begin{aligned}
&||v|| \geq 0 \ \ \forall v \\
&||v|| = 0 \longrightarrow v = 0 \\
&||\alpha v|| = |a|\ ||v|| \\
&||v+w|| \leq ||v|| + ||w||.
\end{aligned} \quad (۱۶)$$

هرفضای ضرب داخلی باهمان اندازه ای که ازروی ضرب داخلی تعریف می شود یک فضای اندازه داراست، ولی یک فضای اندازه دار الزاماً یک فضای ضرب داخلی نیست. به عبارت دیگر یک اندازه لزوماً ازروی یک ضرب داخلی تعریف نشده است. به عنوان مثال درفضای توابع $C[a,b]$ نگاشت $||f|| = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ یک اندازه است که ازروی یک ضرب داخلی تعریف نشده است.

۴ پایه

پایه بهنجار $\{e_i, \quad i=1,\cdots N\}$ را برای فضای V درنظرمی گیریم. بهنجاربودن به معنای آن است که $\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$. هربردار $x\in V$ را می توان برحسب این بردارهای پایه بسط داد ونوشت:

$$x=\sum_{i=1}^{N} x_i e_i. \tag{۱۷}$$

بدیهی است که

$$x_i=\langle e_i, x\rangle. \tag{۱۸}$$

روش گرام اشمیت $Gram-Schmidt$ **برای ساختن پایه بهنجار**

دریک فضای ضرب داخلی، ازیک پایه دلخواه مثل $\{v_1, v_2, \cdots v_N\}$ می توان به روش زیر که به روش گرام اشمیت موسوم است یک پایه بهنجارساخت:

قرارمی دهیم:

$$e_1 := \frac{v_1}{|v_1|}, \qquad e_2 := \frac{v_2-\langle e_1, v_2\rangle e_1}{|v_2-\langle e_1, v_2\rangle e_1|}, \qquad e_3 := \frac{v_3-\langle e_1, v_3\rangle e_1-\langle e_2, v_3\rangle e_2}{|v_3-\langle e_1, v_3\rangle e_1-\langle e_2, v_3\rangle e_2|}, \cdots \tag{۱۹}$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که پایه جدید بهنجاراست. تعبیر هندسی روش بالا نیز روشن وساده است.

مثالهایی از پایه های بهنجار:

الف ـ در R^n و C^n:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۲۰}$$

ب ـ در $M_{\mu\times n}(C), M_{m\times n}(R)$:

$$E_{ij}, \quad i = 1, \cdots m,\ j = 1 \cdots n, \tag{۲۱}$$

که درآن E_{ij} ماتریسی است که درایه (i,j) آن برابر با ۱ و بقیه درایه های آن برابرباصفراست.

ج ـ در $C^k[a,b]$ ، مجموعه $\{e_n(x), f_n(x), \quad n = 0 \cdots \infty\}$ با تعریف

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin(\frac{n\pi}{b-a})x, \qquad f_n := \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos(\frac{n\pi}{b-a})x. \tag{۲۲}$$

د ـ در $P_n[a,b]$، می توان یک پایه مثل $\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$ درنظرگرفت و آن را با فرایند گرام‌ـاشمیت بهنجارکرد. تکمیل این تمرین را به خواننده واگذار می کنیم.

درهرفضای محدود بعد وقتی که یک پایه انتخاب کردیم، می توانیم درآن پایه مولفه های بردار x را به صورت یک ماتریس ستونی به شکل زیر بنویسیم :

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix}. \tag{۲۳}$$

دراین حالت مولفه های بردارهای پایه به صورت زیرخواهند بود:

$$e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad e_N \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{۲۴}$$

هرگاه به جای پایه $\{e_i\}$ پایه $\{e'_i\}$ را درنظربگیریم که درآن $e'_i = S_{li}e_l$ آنگاه خواهیم داشت

$$x'_i = \langle e'_i, x\rangle = \langle S_{li}e_l, x\rangle = S_{li}x_l, \tag{۲۵}$$

ویا به صورت فشرده تر:

$$x' = xS. \tag{۲۶}$$

ازآنجا که پایه های $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ هردوبهنجارهستند براحتی نتیجه می گیریم که ماتریس تبدیل پایه S در شرط زیرصدق می کند:

$$S^\dagger S = I \tag{۲۷}$$

چنین ماتریس هایی را ماتریس های یکانی می گوییم.

بدنیست دراینجا به یک تعریف دیگر اشاره کنیم. هرگاه ماتریسی باالحاقی خود برابرباشد، آن ماتریس را خودالقا یا $Self-Adjoint$ یا هرمیتی می گوییم.

۵ فضای کامل، باناخ وهیلبرت

دنباله کوشی: دریک فضای برداری دنباله ای از بردارها مثل $\{x_1, x_2, \cdots x_n \cdots\}$ درنظرمی گیریم. این دنباله یک دنباله کوشی نامیده می شود

هرگاه فاصله بین بردارها به تدریج کم شود. به عبارت دقیقتر هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مثل N یافت شود به قسمی که

$$\forall \ m,n > N \longrightarrow |x_n - x_m| \leq \epsilon. \tag{۲۸}$$

دریک فضای برداری حد یک دنباله کوشی لزوماً درخود فضا قرارندارد. به عنوان مثال هرگاه میدان اعداد گویا را به عنوان یک فضای برداری روی خودش درنظربگیریم دنباله $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ اگرچه یک دنباله کوشی است، ولی حد آن درداخل میدان اعدادگویا قرارندارد. باافزودن اعداد گنگ به اعداد گویا میدان اعداد حقیقی بدست می آید که کامل است یعنی حد دنباله های کوشی را درخود دارد.

فضای برداری کامل: یک فضای برداری را فضای برداری کامل می گوییم هرگاه حد دنباله های کوشی رادرخود داشته باشد.

فضای باناخ: یک فضای برداری نرم دار را که کامل باشد فضای باناخ می نامیم.

فضای هیلبرت: یک فضای ضرب داخلی را که کامل باشد فضای هیلبرت می نامیم. ازانجا که میدان اعداد حقیقی و مختلط کامل هستند، می توان ثابت کرد که هرفضای محدود بعدی که روی این میدان ها ساخته می شود نیز کامل بوده وبنابراین یک فضای هیلبرت است.

مثال: فضای توابع حقیقی $C[-1,1]$ را با ضرب داخلی استاندارد $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} f(x)g(x)dx$ درنظرمی گیریم. دراین فضا دنباله توابع زیرراتعریف می کنیم:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}(nx+1) & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \end{cases} \tag{۲۹}$$

خواننده می تواند براحتی نشان دهد که این دنباله یک دنباله کوشی است. اما حداین دنباله تابع ناپیوسته پله است که درفضای $C[-1,1]$ قرارندارد. بنابراین $C[-1,1]$ یک فضای هیلبرت نیست.

فضای $L_w^2[a,b]$: فضای توابع مختلط با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle=\int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx$ که درآن w یک تابع دلخواه مثبت است باشرط $||f||<\infty$ یک فضای هیلبرت است. برای اثبات این قضیه وقضیه زیر، خواننده می بایست به کتاب های آنالیز یا آنالیزتابعی مراجعه کند.

قضیه: هرفضای هیلبرت بافضایی مثل $L_w^2[a,b]$ یکسان است.

۶ تبدیلات خطی

دریک فضای برداری V، نگاشت $\hat{T}:V\longrightarrow V$ را یک تبدیل خطی یا عملگر خطی $Linear\ \ operator$ می گوییم هرگاه دارای خاصیت زیرباشد:

$$\hat{T}(x+\alpha y)=\hat{T}(x)+\alpha\hat{T}(y)\qquad\forall\alpha\in F,\quad x,y\in V. \tag{۳۰}$$

بدلیل خطی بودن، یک عملگرخطی تنها با اثرش روی بردارهای پایه مشخص می شود. می نویسیم:

$$\hat{T}e_i=\sum_{j=1}^{N}T_{ji}e_j \tag{۳۱}$$

ماتریس T با درایه های T_{mn} را ماتریس مربوط به تبدیل خطی $\hat{T}$ درپایه $\{e_i\}$ می گوییم. هرگاه پایه فوق بهنجارباشد می توانیم بنویسیم

$$\langle e_j,\hat{T}e_i\rangle=T_{ji}. \tag{۳۲}$$

اثر تبدیل خطی $\hat{T}$ روی یک بردار x عبارت خواهد بود از:

$$\hat{T}x=\hat{T}x_ie_i=x_i(\hat{T}e_i)=x_iT_{ji}e_j=(T_{ji}x_i)e_j=(Tx)_je_j \tag{۳۳}$$

بنابراین اثر تبدیل خطی $\hat{T}$ روی x آن است که ماتریس تبدیل خطی T ازچپ در ماتریس ستونی x ضرب می شود.

هرگاه پایه را عوض کنیم ماتریس تبدیل خطی نیز عوض خواهد شد. اگر به جای پایه $\{e_i\}$ پایه $\{e'_i\}$ را درنظربگیریم که درآن $e'_i=S_{li}e_l$ آنگاه خواهیم داشت

$$T'_{ij}=\langle e'_i,\hat{T}e'_j\rangle=\langle S_{li}e_l,\hat{T}S_{mj}e_m\rangle=S^*_{li}T_{lm}S_{mj}, \tag{۳۴}$$

که به صورت فشرده زیرقابل بازنویسی است:

$$T' = S^{\dagger} T S, \qquad (۳۵)$$

که درآن $S^{\dagger}$ با الحاقی ماتریس S خوانده می شود و چنین تعریف می شود:

$$S^{\dagger} = (S^*)^T, \qquad \text{یا} \qquad S^{\dagger}_{ij} = (S^*)_{ji}. \qquad (۳۶)$$

هرگاه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دوتبدیل خطی دلخواه روی V و α عددی دلخواه متعلق به میدان F باشد، آنگاه $\alpha\hat{A} + \hat{B}$ نیز یک تبدیل خطی روی V است. بنابراین مجموعه تبدیلات خطی روی V تشکیل یک فضای برداری می دهد که آن را با $End(V)$ نمایش می دهیم. هم چنین ضرب دو تبدیل خطی با تعریف

$$(\hat{A}\hat{B})x := \hat{A}(\hat{B}x) \qquad (۳۷)$$

نیز یک تبدیل خطی است. بنابراین $End(V)$ نه تنهایک فضای برداری است بلکه یک جبراست به این معناکه یک فضای برداری است که درآن یک عمل ضرب شرکت پذیر $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$ تعریف شده است. این جبر جابجایی نیست $(\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A})$ اما یکه دار یا یونیتال $(Unital)$ است به این معنا که درآن عنصریکه وجود دارد (دراینجا عملگرهمانی) با خاصیت زیر$\hat{A}\hat{I} = \hat{I}\hat{A} = \hat{A}$.

دیدیم که به یک عملگرخطی می توان یک ماتریس نسبت داد. وقتی که پایه فضارامعین می کنیم بین فضای تبدیلات خطی یعنی $End(V)$ و فضای ماتریس های $M_{n\times n}(C)$ یک یکسانی بوجود می آید. بنابراین می توان ازیک تبدیل خطی ویا ماتریس آن بسته به راحتی سخن گفت. می توان باتعریف زیر، فضای تبدیلات خطی روی V را به یک فضای ضرب داخلی تبدیل کرد:

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = tr(AB^{\dagger}) \qquad (۳۸)$$

خواننده می تواند نشان دهد که این تعریف مستقل از پایه ای است که برای فضای برداری درنظرمی گیریم.

مثال هایی از تبدیلات خطی:

الف ـ در F^n ، هرتبدیل به صورت $x \longrightarrow x' = Ax$ که درآن $A \in M_{n\times n}(F)$.

ب ـ در $M_{m\times n}(F)$، هرتبدیلی که $x \in M_{m\times n}(F)$ را به صورت زیرتبدیل می کند

$$x \longrightarrow x' = AxB^T, \tag{۳۹}$$

که درآن $A \in M_{m,m}(F)$ و $B \in M_{n,n}(F)$. می توان ثابت کرد که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی عبارت است از جمعی از تبدیلات فوق به ترتیب زیر:

$$x \longrightarrow x' := \sum_i A_i x B_i. \tag{۴۰}$$

ج ـ در $C^k[a,b]$. باالهام از مثال یک می توانیم بگوییم که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی، تبدیلی است که $f \in C^k(a,b)$ را به صورت زیرتبدیل می کند:

$$f(x) \longrightarrow f'(x) := \int_a^b K(x,y)f(y) \tag{۴۱}$$

که درآن $K(x,y)$ تابعی است که نسبت به هردو مختصه خود k بار مشتق پذیراست. این تبدیل را یک تبدیل انتگرال و $K(x,y)$ را هسته آن می خوانند. دربعضی ازموارد می توان تبدیل خطی را به صورت یک عملگر دیفرانسیل نیز نوشت: به عنوان مثال درفضای $C^\infty[a,b]$ یعنی فضای توابع بی نهایت مشتق پذیر تبدیلات ازنوع

$$f(x) \longrightarrow \frac{d^r}{dx^r}f(x) \qquad \text{یا} f(x) \longrightarrow x^r f(x) \tag{۴۲}$$

و هرترکیب خطی ازآنها یک عملگرخطی است مثل تبدیل زیر:

$$f(x) \longrightarrow (x^2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + 1)f(x). \tag{۴۳}$$

۷ جمع نیمه مستقیم دو زیرفضا

تعریف: هرگاه V یک فضای برداری و U و W دوزیرفضای آن باشند آنگاه $U+W$ را به عنوان مجموعه زیرتعریف می کنیم:

$$U + W := \{u | v = u + w, \ \ u \in U, \quad w \in W\}. \tag{۴۴}$$

براحتی معلوم می شود که $U+W$ یک زیرفضای V است.

مثال: قرارمی دهیم $V = R^3$ (تمام فضای ۳ بعدی) و $U = \{(x, y, 0)\}$ و $W = \{(0, y, z)\}$. U و W به ترتیب صفحه xy و yz هستند.

تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری و U و W دو زیرفضای آن باشند به قسمی که

الف: $V = U + W$

ب : تنهابردارمشترک بین U و W بردار صفرباشد.

دراین صورت V جمع نیمه مستقیم U و W $(Semi - direct \ \ Sum)$ می گوییم و می نویسیم

$$V = U \oplus W. \tag{۴۵}$$

هرگاه خواننده درمثال قبلی شکل زیرفضاهای U و W را رسم کند خواهد دید که V جمع مستقیم U و W نیست.

قضیه: $V = U \oplus W$ اگروفقط اگر هر بردار $v \in V$ را بتوان به شکل یکتایی به صورت $u + w$ نوشت که درآن $u \in U$ و $w \in W$.

اثبات جهتِ اول: داریم $V = U \oplus W$. حال فرض کنید که v را به دوصورت زیرتجزیه کرده ایم

$$v = u + w, \quad v = u' + w'. \tag{۴۶}$$

نتیجه می گیریم که

$$u - u' = w' - w. \tag{۴۷}$$

ازآنجا که بنابر فرض، تنهابردارمشترک بین U و W صفراست نتیجه می گیریم $u - u' = 0$ و $w' - w = 0$. بنابراین نتیجه می گیریم که تجزیه v برحسب u و w یکتاست.

اثبات جهتِ دوم: فرض می کنیم که تجزیه v یکتاست. حال باید نشان دهیم که تنهابرداری که بین U و W مشترک است همان بردار صفراست. بردار x رابرداری می گیریم که بین U و W مشترک است. این بردار رامی توان به دوصورت زیرنوشت:

$$x = (0 \in V) + (x \in W), \qquad \text{و} \qquad x = (x \in V) + (0 \in W). \tag{۴۸}$$

چون بنابرفرض تجزیه هربرداری یکتاست نتیجه می گیریم که $x = 0 \in V$ و $x = 0 \in W$. بنابراین تنهابردارمشترک بین U و W صفراست.

قضیه: اگر $V = U \oplus W$، آنگاه $dim\ V = dim\ U + dim\ W$.

اثبات: پایه $\{e_1, \cdots e_m\}$ را برای U وپایه $\{e_{m+1}, \cdots e_{m+n}\}$ رابرای W درنظرمی گیریم. ازآنجا که هربردار $v \in V$ را می توان به طور یکتا به صورت $v = u + w$ تجزیه کرد خواهیم داشت

$$v = u + w = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i + \sum_{j=m+1}^{m+n} w_j e_j. \qquad (۴۹)$$

بنابراین $\{e_1, e_2, \cdots e_{m+n}\}$ یک پایه برای V تشکیل می دهد و درنتیجه $dim(V) = dim(U) + dim(W)$.

تعریف: فرض کنید که $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_r$. دراین صورت هربردار $v \in V$ به صورت یکتای $v = v_1 + v_2 + \cdots v_r$ تجزیه می شود. P_j راعملگری تعریف کنید که کارزیرراانجام می دهد:

$$P_j v = v_j. \qquad (۵۰)$$

دراین صورت P_j را عملگرتصویر روی زیرفضای V_j می خوانیم.

قضیه: عملگرهای تصویر خاصیت های زیررادارند:

$$\begin{aligned} P_j P_k &= \delta_{jk} P_j \\ \sum_{j=1}^{r} P_j &= I \end{aligned} \qquad (۵۱)$$

اثبات خاصیت اول ساده است. برای تساوی دوم قرارمی دهیم

$$v = \sum_{j=1}^{r} v_j = \sum_{j=1}^{r} P_j v \qquad (۵۲)$$

چون این رابطه برای هربردارv صحیح است ، خاصیت دوم را نتیجه می گیریم.

قضیه: هرگاه V یک فضای ضرب داخلی باشد و $V = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ که درآن V_j ها برهم عمود هستند، آنگاه عملگرهای P_j هرمیتی هستند.

اثبات: به ازای هردوبردار v و w داریم

$$\langle v, P_j w \rangle = \langle v, w_j \rangle \qquad (۵۳)$$

اما به خاطر عمود بودن زیرفضاها برهم طرف راست برابراست با $\langle v_j, w_j\rangle$ ویا $\langle P_j v, w_j\rangle$ و یا $\langle P_j v, w\rangle$. بنابراین P_j هرمیتی است.

۸ مسئله ویژه مقدار

عمگلر $\hat{T} : V \longrightarrow V$ را درنظرمی گیریم. مسئله ویژه مقدار عبارت است ازیافتن بردارهای غیرصفری است که تحت اثر $\hat{T}$ به مضربی از خود تبدیل شوند، یعنی

$$Tx = \lambda x \tag{۵۴}$$

بردار x غیر صفر خواهد بود هرگاه ماتریس $T - \lambda I$ وارون پذیرنباشد یعنی اینکه

$$det(T - \lambda I) = 0. \tag{۵۵}$$

این معادله یک معادله درجه N است که درحوزه اعداد مختلط حتماً N تا جواب دارد که آنهارابا $\{\lambda_i,\ i = 1, \cdots N\}$ نشان می دهیم وآن هارا ویژه مقدارهای تبدیل $\hat{T}$ می گوییم. این جواب ها لزوماً همه باهم متفاوت نیستند.

بردارمربوط به λ_i را که درمعادله $Tv_i = \lambda_i v_i$ صدق می کند ویژه بردارمربوط به آن ویژه مقدارمی گوییم.

هرگاه که یک ویژه مقدار مثل λ_i، g_i بار تکرارشود گوییم درجه واگنی آن g_i است.

هرگاه x و y ویژه بردارمربوط به λ باشند بدیهی است که هرترکیب خطی آنهانیز ویژه بردار مربوط به λ است. بنابراین مجموعه بردارهای متعلق به یک ویژه مقدارتشکیل یک زیرفضامی دهند که آن را ویژه فضای مربوط به آن ویژه مقدارمی گویند.

۹ عملگرهای هرمیتی، یکانی و بهنجار

تعریف: دریک فضای ضرب داخلی، الحاقی یا $Adjoint$ ِ یک عملگر T عملگری مثل $\hat{T}^\dagger$ است که درشرط زیرصدق کند:

$$\langle v, \hat{T}w\rangle = \langle T^\dagger v, w\rangle \qquad \forall v, w \in V. \tag{۵۶}$$

بااستفاده ازاین تعریف می توان براحتی خواص زیراثابت کرد:

الف : الحاقی یک عملگرخطی خود یک عملگرخطی است.

ب :

$$\begin{aligned} (cA+B)^\dagger &= c^*A^\dagger + B^\dagger \qquad \forall c \in C, \text{ و } A, \ B \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \\ (A^\dagger)^\dagger &= A. \end{aligned} \tag{۵۷}$$

عملگرهرمیتی: دریک فضای ضرب داخلی عملگرهرمیتی به عملگری گفته می شود که درشرط $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ صدق کند.
عملگر پاد هرمیتی به عملگری گفته می شود که درشرط $\hat{T}^\dagger = -\hat{T}$ صدق کند.

مثال: درفضای $C^\infty[a,b]$ عملگر $D := \frac{\partial}{\partial x}$ رادرنظرمی گیریم. این عملگردرزیرفضایی که از توابع تناوبی تشکیل می شود (باشرط $f(a) = f(b)$) پادهرمیتی است . درنتیجه عملگر $P := -iD$ دراین زیرفضا هرمیتی خواهد بود.

عملگر یکانی: دریک فضای ضرب داخلی، عملگریکانی U به عملگری گفته می شود که ضرب داخلی بردارهارا حفظ کند، یعنی

$$\langle \hat{U}v, \hat{U}w \rangle = \langle v, w \rangle. \tag{۵۸}$$

چنین عملگری درشرط $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ صدق می کند.

قضیه: عملگری U یکانی است اگروفقط اگر اندازه همه بردارها را حفظ کند.
اثبات: اگر U یکانی باشد بااستفاده از 58 معلوم می شود که اندازه بردارهاراحفظ می کند. حال فرض کنید که U اندازه همه بردارها را حفظ کند. به ازای هردوبرداردلخواه x, y می دانیم که

$$||Ux|| = ||x||, \qquad ||Uy|| = ||y||, \qquad ||U(x+y)|| = ||x+y||, \qquad ||U(x+iy)|| = ||x+iy||. \tag{۵۹}$$

ازاین روابط نتیجه می گیریم که $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$.

خواننده می تواند ثابت کند که ماتریس مربوط به یک عملگرهرمیتی یا یکانی، ماتریس هرمیتی یا یکانی است .

عملگربهنجاریانرمال: عملگرنرمال عملگری است که باالحاقی خود جابجاشود. طبیعی است که یک عملگرهرمیتی ویکانی نرمال است.

قضیه: عملگرِ A بهنجاراست اگروفقط اگر به ازای هر بردار x داشته باشیم

$$||Ax|| = ||A^\dagger x||. \tag{۶۰}$$

اثبات: اثبات جهت اول: اگر A بهنجارباشد داریم $AA^\dagger = A^\dagger A$. بنابراین

$$\langle Ax, Ax\rangle = \langle A^\dagger Ax, x\rangle = \langle AA^\dagger x, x\rangle = \langle A^\dagger x, A^\dagger x\rangle. \tag{۶۱}$$

اثبات جهت دوم: از تساوی (60) برای برای $x, y, x+y$ و $x+iy$ که درآن x و y دوبردار دلخواه هستند نتیجه می گیریم

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^\dagger x, A^\dagger y\rangle, \qquad \forall x, y. \tag{۶۲}$$

درنتیجه

$$\langle A^\dagger Ax, y\rangle = \langle AA^\dagger x, y\rangle, \tag{۶۳}$$

ویا

$$\langle (A^\dagger A - A^\dagger A)x, y\rangle = 0. \tag{۶۴}$$

چون x و y دلخواه هستند نتیجه می گیریم که $A^\dagger A = AA^\dagger$ وبنابراین A یک عملگربهنجاراست.

قضیه: فرض کنید که A یک عملگربهنجاراست. دراین صورت اگر $Ax = \lambda x$ آنگاه $A^\dagger x = \lambda^* x$.

اثبات: اگر A بهنجارباشد آنگاه $A - \lambda I$ نیزبهنجاراست. حال از قضیه قبل استفاده می کنیم:

$$||(A-\lambda I)x|| = 0 \longrightarrow ||(A-\lambda I)^\dagger x|| = 0 \longrightarrow ||(A^\dagger - \lambda^* I)x|| = 0 \longrightarrow A^\dagger x = \lambda^* x. \tag{۶۵}$$

ازاین قضیه دونتیجه ساده بدست می آید:

نتیجه اول: ویژه مقادیریک عملگرهرمیتی حقیقی هستند.

نتیجه دوم؛ ویژه مقادیر یک عملگریکانی فازخالص هستند.

قضیه: ویژه بردارهای یک عملگر نرمال که متناظربا ویژه مقدارهای متمایزهستند برهم عمودند.

اثبات: فرض کنیم $Ax = \lambda x$ و $Ay = \mu y$. دراین صورت

$$\langle x, \mu y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle A^\dagger x, y\rangle = \langle \lambda^* x, y\rangle, \tag{۶۶}$$

وازآنجا

$$\longrightarrow (\mu - \lambda)\langle x, y\rangle = 0 \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0. \tag{۶۷}$$

۱۰ تجزیه طیفی

قضیه: دریک فضای محدود بعد ویژه بردارهای یک عملگربهنجار یک پایه برای فضا تشکیل می دهند.

باانتخاب یک پایه برای فضامی‌توان اثبات خیلی ساده تری نسبت به آنچه که درکلاس گفته شد ازاین قضیه بدست داد. عملگر نرمال A روی فضای V رادرنظرمی گیریم. می دانیم که هرعملگر حتماً یک ویژه مقدارو یک ویژه برداردارد. این ویژه مقداروویژه بردارمربوطه را با λ_1 و e_1 نشان می دهیم:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1. \tag{۶۸}$$

پایه ای برای فضا انتخاب می کنیم که e_1 اولین عضو آن باشد. دراین صورت ماتریس عملگر A به شکل زیردرمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{n-1} \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} \tag{۶۹}$$

که درآن A_{n-1} یک ماتریس $n-1$ بعدی و b_{n-1} یک بردارسطری $n-1$ بعدی است. اماازقضیه های قبل می دانیم که اگر $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ آنگاه $A^\dagger e_1 = \lambda_1^* e_1$. دراین جا ازبهنجاربودن عملگر A استفاده کرده ایم. بنابراین ماتریس $A^\dagger$ نیز می بایست به فرم بالامثلثی باشد ودرنتیجه می بایست $b_{n-1} = 0$. پس A به شکل بلوکه قطریِ زیر درمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{۷۰}$$

حال A_{n-1} به نوبه خود یک عملگرنرمال است و حداقل یک ویژه مقدارویک ویژه برداردارد. همین استدلال رادرموردآن تکرارمی کنیم ومی بینیم که درپایه ای که اولین و دومین عنصر آن e_1 و e_2 هستند ماتریس عملگر A به شکل زیردرمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{۷۱}$$

باتکراراین عمل می بینیم که درپایه ویژه بردارهای A یعنی پایه $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$، A به طورکامل قطری می شود.

این موضوع برای عملگرهایا ماتریس های نابهنجار صادق نیست. به عنوان مثال، ماتریس زیر را درنظر می گیریم

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c \neq 0. \tag{۷۲}$$

ویژه مقدارهای این ماتریس هردو برابربایک هستند. اما تنهایک ویژه بردار برای این ماتریس وجود دارد که به شکل $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ است. بنابراین ویژه بردارهای این ماتریس نمی توانند یک پایه برای فضا تشکیل دهند.

۱.۱۰ قطری کردن

دیدیم که یک عملگرنرمال درپایه ویژه بردارهای خود قطری است. این امربه این معناست که یک تبدیل یکانی وجود دارد که ماتریس عملگر A راقطری می کند. برای پیداکردن فرم صریح این تبدیل یکانی به ترتیب زیرعمل می کنیم. ویژه مقدارها و ویژه بردارهای A را پیدامی کنیم:

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \qquad i = 1, \cdots n. \tag{۷۳}$$

می دانیم که ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقدارهای متمایز برهم عمودهستند. ویژه بردارهای مربوط به یک ویژه مقداروا‌گن را نیز با روش گرام اشمیت برهم عمود می کنیم. درنتیجه این ویژه بردارها درشرایط $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ صدق می کنند. اگر e_i ها را به صورت بردارهای ستونی درنظربگیریم، $e_i^\dagger$ ها به صورت بردارهای سطری درخواهند آمد و رابطه بهنجاربودن آنها به شکل زیربیان می شود $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$. حال ماتریس S را به شکل زیرمی نویسیم:

$$S = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \tag{۷۴}$$

که درآن e_i ها به عنوان بردارهای ستونی در S قرارگرفته اند. درنتیجه خواهیم داشت

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ . \\ . \\ e_N^\dagger \end{pmatrix}. \tag{۷۵}$$

بدلیل شرط $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$ نتیجه می گیریم که

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ . \\ . \\ e_N^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = I, \tag{۷۶}$$

یعنی S یکانی است.

ازآنجا که $Ae_i = \lambda_i e_i$، بدست می آوریم

$$AS = A\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \cdots & \lambda_n e_n \end{pmatrix} \tag{۷۷}$$

ودرنتیجه

$$S^\dagger A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (۷۸)$$

بنابراین A بایک تبدیل یکانی قطری شده است.

قضیه: دوعملگر نرمال A و B بایکدیگر جابجامی شوند اگروفقط اگر بتوان برای آنها یک مجموعه کامل از ویژه بردارهای مشترک یافت. این قضیه را به شکل دیگری نیز می توان بیان کرد وآن اینکه اگر دو عملگرنرمال بایکدیگر جابجاشوند حتماً می توان پایه ای یافت که درآن هردوعملگرقطری باشند. باید تاکید کنیم که این خاصیت برای هرپایه دلخواهی برقرارنیست وقضیه تنهامی گوید که می توان پایه‌ای یافت که درآن این خاصیت برقرارباشد.

این قضیه هم ازنظرمفهومی و هم از نظرکاربردی اهمیت زیادی درمکانیک کوانتومی دارد و خواننده می بایست به دقت اثبات آنرا فرابگیرد. اثبات: فرض کنیم که A و B دوعملگرباشند که یک مجموعه ویژه بردارمشترک مثل $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ داشته باشند. ازآنجا که این دوعملگرهرمیتی هستند این مجموعه را می توان به عنوان پایه فضاانتخاب کرد. دراین پایه داریم

$$A e_i = \lambda_i e_i, \quad B e_i = \mu_i e_i \qquad (۷۹)$$

که ازآن نتیجه می گیریم

$$ABe_i = BAe_i \longrightarrow AB = BA \longrightarrow [A,B] = 0. \qquad (۸۰)$$

برعکس فرض کنیم که $[A,B]=0$.

ویژه بردارهای عملگر A را پیدا می کنیم. واگنی ویژه مقدار λ_i را g_i می نامیم. درپایه ویژه بردارهایش، A شکل زیرراپیدامی کند.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{g_1\times g_1} & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & \lambda_k I_{g_k\times g_k} \end{pmatrix} \tag{۸۱}$$

حال به ترتیب زیرعمل می کنیم: به ازای هر e_i

$$A(Be_i) = B(Ae_i) = B(\lambda_i e_i) = \lambda_i (Be_i), \tag{۸۲}$$

که درآن از جابجاشدن A و B استفاده کرده ایم. رابطه فوق نشان می دهد که بردار Be_i نیز یک ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار λ_i است. بنابراین Be_i نیز برحسب بردارهای پایه ویژه فضای λ_i قابل بسط است. این امر به این معناست که دراین پایه (همان پایه ای که A درآن قطری است) عملگر B به شکل زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} B_{1_{g_1\times g_1}} & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & B_{k_{g_k\times g_k}} \end{pmatrix}. \tag{۸۳}$$

به عبارت دیگر درپایه‌فوق عملگر A قطری و عمگلر B بلوکه قطری شده است. حال می توان با تبدیل

$$S = \begin{pmatrix} S_{1_{g_1\times g_1}} & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & S_{k_{g_k\times g_k}} \end{pmatrix}. \tag{۸۴}$$

که درآن S_i قطری کننده ماتریس B_i است کل ماتریس B راقطری کرد. این تبدیل قطری بودن A را دست نمی زند زیرا $S_i I_i S_i^\dagger = I_i$. پایه جدید پایه ای است که درآن هردوعملگر قطری هستند.

۲.۱۰ نمادگذاری دیراک

یک فضای برداری V ِ N بعدی با پایه بهنجار $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ درنظرمی گیریم. هربردار $v \in V$ بسطی ازبردارهای پایه به شکل زیراست:

$$v = \sum_{i=1}^{N} v_i e_i \tag{۸۵}$$

ضرب داخلی این بردار درخودش به صورت زیرنوشته می شود:

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i^* v_i. \tag{۸۶}$$

می توان به ازای هرچنین برداری یک بردارسطری بانمادِ $\langle v|$ و یک بردارستونی بانمادِ $|v\rangle$ به شکل زیرتعریف کرد:

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_N \end{pmatrix} \tag{۸۷}$$

و

$$\langle v| = \begin{pmatrix} v_1^*, & v_2^*, & \cdots & v_N^* \end{pmatrix}. \tag{۸۸}$$

بردار $|v\rangle$ را یک بردار ket و بردار $\langle v|$ را یک بردار Bra نام می نهیم. حال به این نکته توجه می کنیم که این دو برداررا می توانیم دریکدیگر ضرب کنیم:

$$\langle v|v\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i^* v_i = \langle v, v\rangle. \tag{۸۹}$$

طرف راست یک ضرب داخلی است ولی طرف چپ ضرب دو ماتریس است. خوبی نمادگذاری دیراک آن است که انواع عملیاتی را که مامی خواهیم روی بردارهاانجام دهیم به عملیاتی ازنوع ضرب ماتریس هاتقلیل می دهد.

بردارهای پایه $e_1, \cdots e_N$ نیز نمایش کت و برای زیر را پیدامی کنند:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۹۰}$$

$$\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \langle N| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{۹۱}$$

بنابراین داریم :

$$|v\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i |i\rangle. \tag{۹۲}$$

$$\langle v| := \sum_{i=1}^{n} v_i^* \langle i|. \tag{۹۳}$$

ازاین به بعد تمام بردارها را به صورت کت و برا نمایش می دهیم و از نوشتن بردارهابه صورت $v = \sum_{i=1}^{n} e_i$ صرف نظرمی کنیم. می توان یک بردار برا مثل $|v\rangle$ و یک بردار کت مثل $\langle w|$ را به صورت درهم ضرب کرد و یک عدد بدست آورد که به آن براکت می گوییم

$$\langle v|w\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i, \tag{۹۴}$$

که درواقع همان ضرب داخلی بین دوبردار w و v است. این براکت دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned} \langle v|w + w'\rangle &= \langle v|w\rangle + \langle v|w'\rangle \\ \langle v|cw\rangle &= c\langle v|w\rangle \\ \langle cv|w\rangle &= c^*\langle v|w\rangle \\ \langle v|v\rangle &\geq 0 \\ \langle v|v\rangle &= 0 \longrightarrow |v\rangle = \langle v| = 0 \end{aligned} \tag{۹۵}$$

براحتی می توان دید که:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i|i\rangle, \langle i|v\rangle = v_i. \qquad (۹۶)$$

می توان یک بردار کت مثل $|v\rangle$ و یک بردار برا مثل $\langle w|$ را به صورت درهم ضرب کرد و یک ماتریس بدست آورد:

$$|v\rangle\langle w| := \begin{pmatrix} v_1w_1^* & v_1w_2^* & v_1w_3^* & \cdot & v_1w_n^* \\ v_2w_1^* & v_2w_2^* & v_2w_3^* & \cdot & v_2w_n^* \\ v_3w_1^* & v_3w_2^* & v_3w_3^* & \cdot & v_3w_n^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_nw_1^* & v_nw_2^* & v_nw_3^* & \cdot & v_nw_n^* \end{pmatrix} \qquad (۹۷)$$

واضح است که :

$$\begin{aligned} |v\rangle\langle w+w'| &= |v\rangle\langle w| + |v\rangle\langle w'| \\ |v\rangle\langle cw| &= c^*|v\rangle\langle w| \\ |cv\rangle\langle w| &= c|v\rangle\langle w|. \end{aligned} \qquad (۹۸)$$

مهمترین روابطی که درمورد بردارهای کت و برا می بایست به یادداشته باشیم ودائماً ازآنها استفاده کنیم روابط زیراست:

$$\begin{aligned} \langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ \sum_i |i\rangle\langle i| &= I \end{aligned} \qquad (۹۹)$$

نمایش دیراک این حسن بسیارمهم را دارد که بسیاری از روابط دیگر نظیر آنچه را که دربخش های پیشین دیدیم به استفاده ساده ای از این دورابطه تقلیل پیدا می کنند. به عنوان مثال می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} |v\rangle &= I|v\rangle = \sum_{i=1}^{N} |i\rangle\langle i|v\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i|i\rangle, \\ T &= \sum_j |j\rangle\langle j|T\sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_{i,j} T_{ji}|j\rangle\langle i|, \\ \langle i|AB|j\rangle &= \sum_k \langle i|A|k\rangle\langle k|B|j\rangle \end{aligned} \qquad (۱۰۰)$$

رابطه اول بسط یک بردار برحسب بردارهای پایه را بیان می کند، رابطه دوم بسط یک عملگررا برحسب عملگرهای پایه $|i\rangle\langle j|$ بیان می کند و بالاخره رابطه آخر درواقع بیان می کند که ماتریس حاصلضرب دو تبدیل خطی برابراست با حاصل ضرب ماتریس های آن دو تبدیل خطی.

هرگاه پایه فضای برداری را عوض کنیم مولفه های یک بردار عوض می شوند. نحوه عوض شدن به ترتیب زیراست:

$$v'_i := \langle i'|v\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle i'|j\rangle\langle j|v\rangle \longrightarrow v'_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}v_j \qquad (۱۰۱)$$

یا به صورت ماتریسی :

$$v' := Sv \qquad (۱۰۲)$$

که درآن ماتریس مربعی S با درایه های $S_{ij} := \langle i'|j\rangle$ ماتریس تبدیل پایه است.

هم چنین تحت تغییر پایه درایه های یک تبدیل خطی نیز عوض می شوند. به شکل زیر:

$$\langle i'|T|j'\rangle = \sum_{i,j}\langle i'|i\rangle\langle i|T|j\rangle\langle j|j'\rangle \longrightarrow T' := STS^{-1}. \qquad (۱۰۳)$$

۱۱ نگاشت بین فضای کت ها و فضای برا ها

بین فضای کت ها و فضای براها می توان نگاشتی به شکل زیرتعریف کرد:

$$^{\dagger} : |v\rangle \longrightarrow \langle v|, \qquad ^{\dagger} : \langle v| \longrightarrow |v\rangle. \qquad (۱۰۴)$$

براحتی دیده می شود که این نگاشت که نگاشت الحاقی نامیده می شود خواص زیر را دارد:

$$\begin{aligned} |cv\rangle^{\dagger} &= c^*\langle v| \\ |v+w\rangle^{\dagger} &= \langle v+w| \\ (|v\rangle^{\dagger})^{\dagger} &= |v\rangle \end{aligned} \qquad (۱۰۵)$$

با توجه به اینکه عملگر الحاقی هم روی کت ها و هم روی برا ها اثر می کند می توان آن را روی تبدیل های خطی نیز اعمال کرد به این معنا که:

$$^\dagger(A) =^\dagger (\sum_{i,j} A_{ij}|i\rangle\langle j|) = \sum_{i,j} A^*_{ij}|j\rangle\langle i| \tag{۱۰۶}$$

درنتیجه هرگاه به عملگرها به شکل ماتریس نگاه کنیم خواهیم داشت :

$$A^\dagger = (A^*)^T \tag{۱۰۷}$$

که درآن نماد ^{T} به معنای ترانهاده ماتریس است.

با استفاده از این تعریف می توان براحتی نشان داد که :

$$|w\rangle = T|v\rangle \longrightarrow \langle w| = \langle v|T^\dagger \tag{۱۰۸}$$

و بااستفاده از رابطه اخیر می توان صحت روابط زیر رادرمورد عملگرها و الحاقی آنها تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger, \\ (cA)^\dagger &= c^* A^\dagger, \\ ((A)^\dagger)^\dagger &= A \\ (A+B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger. \end{aligned} \tag{۱۰۹}$$

عملگرهای تصویرگر:

فضای برداری V ویک زیرفضای آن مثل W درنظرمی گیریم. برای W یک پایه مثل $\{|i\rangle,\ \ i = 1, \cdots m\}$ درنظرمی گیریم. دراین صورت عملگر

$$P_W := \sum_{i=1}^{m} |i\rangle\langle i| \tag{۱۱۰}$$

عملگرتصویرروی V خوانده می شود. این عملگربردارهای فضا را بروی W تصویرمی کند. این عملگرهرمیتی است و درشرط $P^2 = P$ صدق می کند.

عملگرمثبت: عملگر T را مثبت می گوییم هرگاه

$$\langle v|T|v\rangle \geq 0 \qquad \forall v. \tag{۱۱۱}$$

واضح است که یک عملگرمثبت حتماً دارای ویژه مقادیر بزرگتریا مساوی باصفراست. هرگاه چنین عملگری بهنجارباشد دارای یک تجزیه طیفی است. یعنی:

$$T = \sum_i \lambda_i P_i, \tag{۱۱۲}$$

دراین صورت می توان جذراین عملگررا به صورت زیرتعریف کرد:

$$T^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{1}{2}} P_i. \tag{۱۱۳}$$

توابع عملگرهای نرمال:

درمکانیک کوانتومی اغلب نیازداریم که توابعی از عملگرهای هرمیتی را تعریف کنیم. فرض کنید که T یک عملگر دلخواه و $f: C \longrightarrow C$ تابعی بابسط زیرباشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \tag{۱۱۴}$$

دراین صورت تابع $f(T)$ نیز باهمین بسط تعریف می شود.

$$f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n T^n. \tag{۱۱۵}$$

قضیه: اگر T یک عملگربهنجارباشد تابع $f(T)$ همواره یک چند جمله ای خواهد بود.

اثبات: چون T بهنجاراست داریم

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i, \tag{۱۱۶}$$

وازآنجا

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i \tag{۱۱۷}$$

حال می توانیم عملگرهای تصویرگر P_i را برحسب T و توان های آن بنویسیم. فرض کنید که $P_j = g_j(T)$. دراین صورت خواهیم داشت

$$P_j := g_j(T) = g_j(\sum_i \lambda_i P_i) = \sum_i g_j(\lambda_i) P_i \tag{۱۱۸}$$

که ازآن نتیجه می گیریم $g_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$. بنابراین هرتابع $g_j(x)$ می بایست چنان باشد که‌به ازای $x = \lambda_j$ مقدارآن برابربا ۱ و به ازای $x \neq \lambda_j$ مقدارآن برابرباصفرباشد. چنین تابعی فرم زیررادارد:

$$g_j(x) = \prod_{k\neq j} \frac{x - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \tag{۱۱۹}$$

درنتیجه

$$P_j \equiv g_j(T) = \prod_{k\neq j} \frac{T - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}. \tag{۱۲۰}$$

این رابطه نشان می دهد که هرعملگرتصویرگر چیزی نیست جزیک چندجمله ای برحسب T ودرنتیجه تابع $f(T)$ نیز چیزی جزیک چند جمله ای برحسب T نخواهد بود.

۱.۱۱ تجزیه قطبی یک عملگر $Polar\ Decomposition$

بین اعداد مختلط و عملگرها تناظر جالبی وجود دارد به این معنا که اگر یک عدد مختلطِ z را متناظر با یک ماتریس یا عملگر دلخواه مختلط بگیریم، آنگاه یک عدد حقیقی متناظر با یک عملگر هرمیتی، یک عدد موهومی خالص متناظر با یک عملگر پاد هرمیتی و یک عدد مثبت متناظر با یک عملگر مثبت است. هم چنین یک عدد مختلط که یک فاز خالص است متناظر با یک عملگر یکانی است. این تناظر را می توان به بیش از این نیز گسترش داد و آن اینکه همچنان که یک عدد مختلط را می توان درمختصات قطبی به شکل $z = re^{i\theta}$ یک عملگر دلخواه را نیز می توان به صورت قطبی تجزیه کرد. قضیه زیر این موضوع را بیان می کند:

قضیه: تجزیه قطبی $Polar\ Decomposition$ اگر A یک عملگر دلخواه مربعی روی یک فضای برداری V باشد، آنگاه می توان نوشت

$$A = UJ \tag{۱۲۱}$$

که درآن J عملگر مثبت و U یک عملگر یکانی است که در رابطه

$$UU^\dagger = UU^\dagger = I$$

صدق می کند.

اثبات: می دانیم که عملگر $J := \sqrt{A^\dagger A}$ یک عملگر مثبت و بهنجار است. بنابراین می توان درپایه ای آن را قطری کرد، یعنی

$$J|i\rangle = \lambda_i|i\rangle, \quad \lambda_i \geq 0. \tag{۱۲۲}$$

برای ویژه بردارهایی که ویژه مقدارِ λ_i مخالف صفراست قرار می دهیم:

$$|e_i\rangle := \frac{A|i\rangle}{\lambda_i}. \tag{۱۲۳}$$

این بردارها یک مجموعه بردار متعامد یکه تشکیل می دهند، زیرا:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\langle i|A^\dagger A|j\rangle = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\langle i|J^2|j\rangle = \delta_{ij}. \tag{۱۲۴}$$

این مجموعه بردارهای $|e_i\rangle$ را با فرایند گرام-اشمیت تبدیل به یک پایه کامل می کنیم و همگی آنها را نیز با $|e_i\rangle$ نمایش می دهیم و سپس عملگر زیر را می سازیم:

$$U := \sum_i |e_i\rangle\langle i|. \tag{۱۲۵}$$

این عملگر یک عملگر یکانی است. حال نشان می دهیم که اثر عملگر UJ و A روی پایه $\{|i\rangle\}$ یکسان است. اگر $\lambda_i = 0$ آنگاه

$$UJ|i\rangle = 0 \qquad A|i\rangle = 0. \tag{۱۲۶}$$

این که چرا $A|i\rangle = 0$، ازاین ناشی می شود که اندازه این بردار یعنی $\langle i|A^\dagger A|i\rangle$ برابر با صفراست. اگر هم $\lambda_i \neq 0$، آنگاه

$$UJ|i\rangle = U\lambda_i|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle, \qquad A|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle. \tag{۱۲۷}$$

نباراین این دو عملگر باهم مساوی هستند و درنتیجه $A = UJ$. می توانیم این عملگر را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$A = UJ = UJU^\dagger U = KU,$$

که در آن K بازهم یک عملگر مثبت است.

تا کنون فرض کردیم که ماتریس A مربعی است. اما تجزیه قطبی را با تغییرات اندکی می توان برای ماتریس های غیرمربعی نیز ثابت کرد. فرض کنید که $A_{m\times n}$ یک ماتریس $m\times n$ است که در آن $m<n$ است. در این صورت ماتریس $J^2=A^\dagger A$ یک ماتریس مربعی مثبت با ابعاد $n\times n$ است. این ماتریس حداقل دارای $n-m$ تا ویژه مقدار صفر است. دلیل اش هم در رابطه های زیر روشن است:

$$\langle\lambda|J^2|\lambda\rangle=0 \quad \leftrightarrow \langle\lambda|A^\dagger A|\lambda\rangle=0 \quad \leftrightarrow A|\lambda\rangle=0 \tag{۱۲۸}$$

اما از آنجا که A یک ماتریس $m\times n$ است و $m<n$ است، معادله $A|\lambda\rangle=0$ حتما دارای $m-n$ تا جواب است. حال با جواب های غیر صفری که احتمالا تعداد آنها از m ممکن است کمتر هم باشد و با کامل کردن آنها به m تا بردار متعامد با فرایند گرام اشمیت، عملگر زیر را می سازیم:

$$U=\sum_{i=1}^m |e_i\rangle\langle i| \tag{۱۲۹}$$

ماتریس U یک ماتریس $m\times n$ است. این ماتریس دارای شرط زیر است:

$$UU^\dagger=I_m. \tag{۱۳۰}$$

چنین عملگری را یک ایزومتری می خوانیم. دقت کنید که $U^\dagger U=P_n$ که در آن P_n عملگر تصویر روی زیرفضایی است که در آن J^2 صفر نیست.

بقیه استدلال هایی که قبلا در مورد ماتریس های مربعی انجام دادیم در این مورد نیز برقرار است و ثابت می شود که $A=UJ$. از آنجا که $U^\dagger U=P_n$ است، و در نتیجه $U^\dagger U$ با J جابجا می شود، به هیچ نوع ناسازگاری با رابطه ای که قبلا داشتیم یعنی $A^\dagger A=J^2$ نیز بر نمی خوریم زیرا

$$A^\dagger A=JU^\dagger UJ=JP_nJ=J^2.$$

سوالی که پیش می آید این است که برای وقتی که $m>n$ است چگونه تجزیه قطبی انجام می شود. پاسخ اش این است که در این صورت ماتریس $A^\dagger$ را تجزیه قطبی می کنیم و سپس نتیجه را ترانهاده می کنیم.

مثال: عملگر زیر را در نظر می گیریم:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

بدست می آوریم:

$$J^2 = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ویژه مقدارها و ویژه بردارهای این عملگر عبارتند از:

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 0, \tag{۱۳۱}$$

عبارتند از:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{۱۳۲}$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$J = \sqrt{J^2} = \sqrt{3}|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -3+\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{۱۳۳}$$

هم چنین داریم:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}A|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |e_2\rangle = A|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{۱۳۴}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$U = |e_1\rangle\langle 1| + |e_2\rangle\langle 2| = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 2 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{۱۳۵}$$

حال خواننده می تواند نشان دهد که واقعا

$$A = UJ, \qquad\qquad UU^\dagger = I_2.$$

که در آن I_2 ماتریس واحد دو بعدی است.

دقت کنید که عدد مختلط z را می توان تنها به یک صورت $z = re^{i\theta} = e^{i\theta}r$ تجزیه قطبی کرد، اما یک ماتریس A را می توان به دو صورت $A = UJ$ و یا
$A = VK$ تجزیه قطبی کرد. برای بدست آوردن تجزیه دوم از ماتریس مثبت $K = AA^\dagger$ شروع می کنیم و همان مراحل بالا را تکرار می کنیم.

۲.۱۱ تجزیه مقدار منفرد $Singular\ Value\ Decomposition$

تاکنون دیدیم که عملگرهای بهنجار را می توان قطری کرد. قضیه زیر تعمیمی است که نشان می دهد قطری کردن یک ماتریس یا عملگر دلخواه چگونه انجام می شود.

قضیه: تجزیه منفرد: یک ماتریس مربعی دلخواه A را همواره می توان به صورت $A = UDV$ نوشت که درآن D یک ماتریس قطری است و U و V ماتریس های یکانی هستند.

اثبات: ماتریس A را تجزیه قطبی می کنیم و می نویسیم

$$A = UJ. \qquad (۱۳۶)$$

ازآنجا که J یک ماتریس مثبت و درنتیجه هرمیتی است می توان آن را قطری کرد و نوشت $J = V^\dagger DV$ که درآن V یک ماتریس یکانی است. بنابراین

$$A = UJ = U(V^\dagger DV) = (UV^\dagger)DV = U'DV \qquad (۱۳۷)$$

که درآن U' و V یکانی هستند.

۱۲ ضرب تانسوری فضاهای برداری

برای سادگی دراین درس ضرب تانسوری دو فضای برداری را به طور مجرد ومستقل ازپایه تعریف نمی کنیم. برای چنین تعریفی خواننده می تواند به هرکتاب جبرخطی مراجعه کند.

هرگاه $(A)_{m\times n}$ و $(B)_{p\times q}$ دو ماتریس با ابعاد داده شده باشند می توان ضرب تانسوری آنهارا که ماتریسی با ابعاد $(mp\times nq)$ است به شکل زیرتعریف کرد:

$$(A\otimes B)_{ij,kl} := A_{ik}B_{jl} \qquad (۱۳۸)$$

به لحاظ عملی ضرب این دو ماتریس به شکل زیر محاسبه می شود:

$$A\otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdot & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdot & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdot & a_{mn}B \end{pmatrix} \qquad (۱۳۹)$$

این ضرب دارای خواص زیراست که خواننده می تواند با استفاده از تعریف صحت آنها را تحقیق کند:

$$\begin{aligned} A\otimes(B+C) &= A\otimes B + A\otimes C \\ A\otimes(\alpha B) &= (\alpha A)\otimes B = \alpha(A\otimes B) \\ (A\otimes B)\otimes C &= A\otimes(B\otimes C) \\ (A\otimes B)(C\otimes D) &= AC\otimes BD \\ (A\otimes B)^\dagger &= A^\dagger\otimes B^\dagger \end{aligned} \qquad (۱۴۰)$$

حال اگر فضای برداری V با بردارهای پایه $\{|i\rangle,\ i=1,\cdots n\}$ و فضای برداری W با بردارهای پایه $\{|\mu\rangle, \mu=1\cdot m\}$ را درنظر بگیریم، می توان ضرب تانسوری بردارهای پایه را مطابق با تعریف بالا بدست آوریم. به این ترتیب mn بردار پایه به شکل $|i\rangle\otimes|\mu\rangle$ بدست می آوریم که آنها را به اختصار با $|i,\mu\rangle$ نمایش می دهیم:

$$|i,\mu\rangle := |i\rangle\otimes|\mu\rangle \qquad i=1\cdots m,\ \mu=1\cdots n. \qquad (۱۴۱)$$

این بردارهای جدید یک فضای mn بعدی را جاروب می کنند که آن را ضرب تانسوری فضاهای V و W می خوانیم. درحقیقت داریم :

$$V \otimes W := \text{Span}\{|i,\mu\rangle\}. \tag{۱۴۲}$$

مثال: هرگاه V یک فضای برداری با پایه

$$\{|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

باشد آنگاه $V \otimes V$ یک فضای برداری ۴ بعدی با پایه های زیراست:

$$|0,0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |0,1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1,0\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1,1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۱۴۳}$$

به ازای هر دو بردار $|v\rangle$ و $|w\rangle$ می توان برداری درفضای $V \otimes W$ به شکل زیرتعریف کرد:

$$|v\rangle \otimes |w\rangle := v_i w_\mu |i,\mu\rangle \tag{۱۴۴}$$

این بردار را ضرب تانسوری بردارهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ می گوییم. این ضرب به طور بدیهی از همان خواصی پیروی می کند که ضرب ماتریسی، یعنی

$$\begin{aligned} |v\rangle \otimes (|w\rangle + |z\rangle) &= |v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |z\rangle \\ |v\rangle \otimes (\alpha|w\rangle) &= (\alpha|v\rangle) \otimes |w\rangle = \alpha(|v\rangle \otimes |w\rangle) \\ (|v\rangle \otimes |w\rangle) \otimes |z\rangle &= |v\rangle \otimes (|w\rangle \otimes |z\rangle) \\ (|v\rangle \otimes |w\rangle)^\dagger &= \langle v| \otimes \langle w|. \end{aligned} \tag{۱۴۵}$$

یک بردار دلخواه در فضای $V \otimes W$ را الزاما نمی توان به صورت $|v\rangle \otimes |w\rangle$ نوشت مثل بردار زیر

$$|\psi\rangle := |0,0\rangle + |1,1\rangle \tag{۱۴۶}$$

که خواننده خود می تواند این امر را نشان دهد. با این وجود هر حالتی را می توان به صورت مجموعی از ضرب تانسوری بردارهای V در بردارهای W نوشت. برای فهم این نکته کافی است دقت کنیم که هر حالت دلخواه در $V \otimes W$ چنین بسطی دارد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu}|i,\mu\rangle \tag{۱۴۷}$$

که باتعریف $|\phi_i\rangle := \sum_\mu \psi_{i,\mu}|\mu\rangle$ می توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \otimes |\phi_i\rangle, \tag{۱۴۸}$$

و این ادعای فوق را ثابت می کند. هر حالتی را که نتوان به صورت $|v\rangle \otimes |w\rangle$ نوشت یک حالت درهم تنیده می گوییم. یکی از مسائل مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی و درمکانیک کوانتومی که دامنه آن به ریاضیات خالص نیز کشیده شده است مطالعه این حالت های درهم تنیده است.

هرگاه $A : V \longrightarrow V$ و $B : W \longrightarrow W$ دوعملگر خطی باشند می توان ضرب تانسوری آنهارا به شکل زیرروی بردارهای پایه تعریف کرد:

$$(A \otimes B)(|i,\mu\rangle) := (A|i\rangle) \otimes (B|\mu\rangle). \tag{۱۴۹}$$

برای تعیین عناصر ماتریسی این عملگر به طریق معمول عمل می کنیم:

$$(A \otimes B)_{k\nu,i\mu} := \langle k,\nu|A \otimes B|i,\mu\rangle = \langle k|A|i\rangle\langle \nu|B|\mu\rangle = A_{ki}B_{\nu\mu} \tag{۱۵۰}$$

که نشان می دهد ماتریس ضرب تانسوری عملگر ها از ضرب تانسوری ماتریس های دوعملگر بدست می آید.

تمرین: نشان دهید که هرعملگر $T : V\otimes W \longrightarrow V\otimes W$ را می توان به صورت مجموعی از عملگرهای $a\otimes b : V\otimes W \longrightarrow V\otimes W$ نوشت.

۱.۱۲ رد و رد جرئی

فرض کنید که T عملگری است که روی فضای $V\otimes W$ تعریف شده است. بنابر تمرینی که در بالا حل کردید می توان این عملگر را به صورت زیر نوشت:

$$T = \sum_i a_i \otimes b_i \tag{۱۵۱}$$

دراین صورت ردّ های جزئی عملگر T به صورت زیر تعریف می شوند:

$$tr_V(T) := \sum_i tr(a_i) b_i, \qquad tr_W(T) := \sum_i tr(b_i) a_i. \tag{۱۵۲}$$

بنابراین $tr_V(T)$ عملگری است روی فضای W و $tr_W(T)$ عملگری است روی فضای V.

تمرین: نشان دهید که

$$[tr_V(T)]_{\mu,\nu} := \sum_i T_{i\mu,i\nu}, \qquad [tr_W(T)]_{i,j} := \sum_\mu T_{i\mu,j\mu}. \tag{۱۵۳}$$

هم چنین نشان دهید که $tr(T) = tr_V(tr_W(T))$.

مطالبی که در ضمیمه های این درس آمده است برای فهم بقیه درس محاسبات واطلاعات کوانتومی ضروری نیستند و خواننده می تواند از خواندن آنها صرف نظر کند.

۱۳ ضمیمه یک: تابع دلتای دیراک

تابع پیوسته زیر را درنظرمی گیریم که درآن $0 < \epsilon << 1$.

$$\delta_\epsilon(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon \leq x \leq \epsilon \\ 0 & \epsilon \leq x \end{cases} \tag{۱۵۴}$$

این تابع دارای خاصیت های زیراست:

الف:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x) dx = 1, \tag{۱۵۵}$$

ب: برای هرتابعی که درفاصله $(-\epsilon, \epsilon)$ متناهی باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x) f(x) = f(0) + O(\epsilon) \tag{۱۵۶}$$

که درآن $O(\epsilon)$ کمیتی از مرتبه ϵ است.

حد تابع $\delta_\epsilon(x)$ را وقتی که $\epsilon \longrightarrow 0$ با تابع $\delta(x)$ نشان می دهیم وقرارمی دهیم

$$\delta(x) := \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \delta_\epsilon(x). \tag{۱۵۷}$$

و آن را تابع دلتای دیراک می نامیم. به خودی خود $\delta(x)$ یک تابع نیست بلکه می توان به آن به عنوان یک عملگر نگاه کرد که تنها درزیر یک انتگرال معنادارد.

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) = f(0). \tag{۱۵۸}$$

می توان تابع $\delta(x-b)$ را به طور مشابه تعریف کرد. این تابع دارای خاصیت های زیراست:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b) dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b) f(x) dx = f(b), \tag{۱۵۹}$$

تابع دلتای دیراک را می توان به عنوان حد دنباله های دیگری ازتوابع نیز گرفت. درزیر چند تااز این دنباله هارا معرفی می کنیم.

دنباله اول : قرارمی دهیم

$$g_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma 2}}, \tag{۱۶۰}$$

که نشان دهندهٔ تابعی گاووسی باپهنای σ وماکزیمم $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ درنقطه $x = 0$ است. سطح زیرمنحنی آن نیز برابر است با۱. دراینجا داریم

$$\delta(x) := \lim_{\sigma\longrightarrow 0} g_\sigma(x). \tag{۱۶۱}$$

دنباله دوم: قرارمی دهیم

$$\delta_T(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{ix} dt = \frac{\sin Tx}{\pi x}. \tag{۱۶۲}$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_T(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} D_T(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1. \tag{۱۶۳}$$

برای این دنباله داریم

$$\delta(x) := \lim_{T\longrightarrow\infty} D_T(x). \tag{۱۶۴}$$

وازآنجا به رابطه بسیارمهم زیرمی رسیم:

$$\delta(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dt. \tag{۱۶۵}$$

بعضی دیگرازخواص تابع دلتا به شرح زیرهستند:

$$\begin{aligned} &\delta(x - x') = \delta(x' - x) \\ &\int \delta'(x - x') f(x') dx' = -\frac{df}{dx}(x). \end{aligned} \tag{۱۶۶}$$

۱۴ ضمیمه دو: توابع دلتا به عنوان پایه ای برای فضای توابع

دراین قسمت می خواهیم نشان دهیم که توابع دلتارامی توان به عنوان یک پایه برای فضای توابع درنظرگرفت. فضای توابع $F[0,1]$ را درنظر می گیریم. هیچ نوع فرض بخصوصی درباره این توابع نظیر پیوستگی یا مشتق پذیری نمی کنیم. این فضایک فضای بی نهایت بعدی است. حال به ازای هر عدد بزرگ N برای این فضا یک پایه درنظرمی گیریم که باتقریب خوبی می تواند فضای توابع را جاروب کند. سپس حد $N \longrightarrow \infty$ را درنظرمی گیریم که درآن توابع فضا با دقت توسط پایه تعریف شده نمایش داده می شوند. فاصله $[0,1]$ رابه N قسمت تقسیم می کنیم. به این ترتیب داریم

$$[0,1] = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \Delta_N \qquad (۱۶۷)$$

که درآن

$$\Delta_n := [\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}] \qquad (۱۶۸)$$

توابع زیر را تعریف می کنیم:

$$e_n(x) := \begin{cases} N & x \in \Delta_n \\ 0 & x \notin \Delta_n \end{cases} \qquad (۱۶۹)$$

سطح زیراین توابع مساوی بایک است. این توابع بریکدیگرعمودند اما بهنجارنیستند:

$$\langle e_n, e_m \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) e_m(x) dx = N\delta_{m,n}. \qquad (۱۷۰)$$

هم چنین این خاصیت رادارند که به ازای هرتابع $f \in F[0,1]$ داریم :

$$\langle e_n, f \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) f(x) dx = N \int_{x\in\Delta_n} f(x) dx =: N(\frac{1}{N} f(x_n)) = f(x_n), \qquad (۱۷۱)$$

که درآن $x_n \in \Delta_n$ نقطه ای درون Δ_n است که باتقریب خوبی نشان دهنده مقدارتابع در ناحیه Δ_n است، به عبارت دیگر:

$$f(x_n) := \frac{\int_{x\in\Delta_n} f(x) dx}{\frac{1}{N}} \qquad (۱۷۲)$$

شکل ۱: درحد $N \longrightarrow \infty$، شاخص گسسته $\frac{n}{N}$ به سمت شاخص پیوسته y و تابع $e_n(x)$ به تابع $\delta(x-y)$ میل می کند.

حال N را به سمت بی نهایت میل می دهیم. دراین حالت اندیس n نیز جای خود را به یک اندیس پیوسته مثل $y := \frac{n}{N}$ می دهد. تابع $e_n(x)$ نیز مطابق با نمایشی که قبلاً درمورد توابع دیراک دیدیم به تابع دلتای دیراک یعنی $\delta(x-y)$ میل می کند، شکل (1)

نحوه تبدیل کمیت ها درحد $N \longrightarrow \infty$ به شکل زیراست.

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{N} &\longrightarrow y \\
e_n(x) &\longrightarrow \delta(x-y) \\
|e_n\rangle &\longrightarrow |y\rangle \\
\langle x|e_n\rangle &\longrightarrow \langle x|y\rangle \\
\langle e_n|e_m\rangle = \delta_{n,m} &\longrightarrow \langle y|y'\rangle = \delta(y-y'). \qquad (۱۷۳)
\end{aligned}
$$

تابع e_n را دراین حالت به صورت برداریِ $\langle y|$ نشان می دهیم که نمایش بِرای آن به صورت $|y\rangle$ است. رابطه (171) به شکل زیردرمی آید.

$$\langle y|f\rangle = \int_0^1 \delta(y-x)f(x)dx = f(y), \tag{۱۷۴}$$

هرگاه‌دراین حدّ $N\delta_{m,n}$ را به عنوان تابع $K(y,y')$ نشان دهیم که درآن $y = \frac{n}{N}$ و $y' = \frac{m}{N}$ هستند، از تساوی

$$\sum_n N\delta_{m,n}\frac{1}{N} = 1 \tag{۱۷۵}$$

نتیجه می گیریم که

$$\int K(y,y')dy' = \lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_m N\delta_{m,n}\frac{\Delta y}{\Delta m} = \sum_m N\delta_{m,n}\frac{1}{N} = 1. \tag{۱۷۶}$$

بنابراین $K(y,y')$ همان تابع دلتای دیراک است ورابطه (170) را می بایست به صورت زیرنوشت:

$$\langle y|y'\rangle = \delta(y-y'). \tag{۱۷۷}$$

یا

$$\int_0^1 dx\delta(x-y)\delta(x-y')dx = \delta(y-y'). \tag{۱۷۸}$$

آنچه که می خواهیم درپایان این بخش روی آن تاکید کنیم آن است که یک تابع $f \in F[0,1]$ را به صورت یک بردارکت $|f\rangle$ یا بِرای $\langle f|$ نمایش می دهیم. مقداراین تابع یعنی $f(x)$ تصویرآن روی بردارپایه $|x\rangle$ است ، یعنی

$$f(x) = \langle x|f\rangle. \tag{۱۷۹}$$

رابطه (178) نیز به شکل زیردرمی آید:

$$\int_0^1 \langle y|x\rangle\langle x|y'\rangle dx = \langle y|y'\rangle, \tag{۱۸۰}$$

ویابابرداشتن $\langle y|$ و $|y'\rangle$ ازدوطرف

$$\int_0^1 |x\rangle\langle x|dx = I, \tag{۱۸۱}$$

که درآن I عملگرهمانی است.

باید تاکید کنیم که تنهابرای سادگی فاصله $[0,1]$ رادرنظرگرفتیم. این پایه برای فضای توابع $F[a,b]$ ویا $F(-\infty,\infty)$ نیز برقراراست. هم چنین براحتی این روابط به بیشترازیک بعد نیز تعمیم می یابند.

۱۵ ضمیمه سه: تبدیل فوریه

فضای توابع مختلط درفاصله $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ رادرنظرمی گیریم. این فضارا با $C[\frac{-L}{2},\frac{L}{2}]$ نشان می دهیم. ضرب داخلی روی این فضا به شکل $\langle f,g\rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)g^*(x)dx$ تعریف شده است. توابع

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{2\pi inx}{L}}, \quad n\in Z \tag{۱۸۲}$$

را درنظرمی گیریم. این توابع بریکدیگر عمود بوده ونرم همه آنهابرابرباواحداست:

$$\langle e_n,e_m\rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x)e_n(x)dx = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{-2\pi inx}{L}}e^{\frac{2\pi imx}{L}}dx = \delta_{n,m}. \tag{۱۸۳}$$

علاوه براین، هرتابع دلخواه را می توان برحسب این توابع بسط داد:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x). \tag{۱۸۴}$$

ضرایب f_n را می توان به ترتیب زیربدست آورد:

$$f_n = \langle e_n,f\rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x)f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi inx}{L}}f(x)dx. \tag{۱۸۵}$$

بنابراین مجموعه توابع $\{e_n\}$ تشکیل یک پایه برای این فضا می دهند. باجایگزینی (185) در رابطه (184) بدست می آوریم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(y)f(y)dye_n(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}(\sum_{-\infty}^{\infty} e_n(y)^*e_n(x))f(y)dy \tag{۱۸۶}$$

مقایسه ای بارابطه (166) نشان می دهد که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^*e_n(x) = \delta(x-y). \tag{۱۸۷}$$

این رابطه را رابطه کامل بودن پایه های $\{e_n\}$ می گوییم.

حال L را به سمت بی نهایت میل می دهیم. دراین حالت توابع $e_n(x)$ بخاطر عامل $\frac{2\pi in}{L}$ بسیاربه هم نزدیک می شوند و درنتیجه بهتراست که آنهارا بایک شاخص پیوسته یعنی $k := \frac{2\pi n}{L}$ مشخص کنیم. علاوه برآن اگربه همین شکل دراین توابع حدِ $L \longrightarrow \infty$ رااعمال کنیم، به خاطر عامل $\frac{1}{\sqrt{L}}$ این توابع همگی صفرخواهند شد. بنابراین می بایستی توابع پایه جدیدرا ضمن جایگزینی شاخص گسستهٔ $\frac{2\pi n}{L}$ با شاخص پیوسته k درتوابع اولیه درضریب مشخصی نیز ضرب کنیم. توابع جدید را با $\hat{e}_k(x)$ نشان می دهیم وقرارمی دهیم

$$\hat{e}_k(x) := Ae_n(x) \qquad k := \frac{2\pi n}{L} \tag{۱۸۸}$$

که درآن ضریب A می بایست تعیین شود. بهترین راه برای این کارتوجه به کامل بودن پایه یعنی رابطه (187) است. این رابطه را به صورت زیرمی توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) \frac{\Delta n}{\Delta k}\Delta k \\ = \quad & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{C^2}\hat{e}_k(y)^*\hat{e}_k(x)\frac{L}{2\pi}\Delta k = \delta(x-y). \end{aligned} \tag{۱۸۹}$$

این رابطه به مامی گوید که می بایست C را برابر با $\sqrt{\frac{L}{2\pi}}$ بگیریم. بااین جایگزینی خواهیم داشت:

$$\hat{e}_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \tag{۱۹۰}$$

ورابطه (189) به شکل زیردرمی آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_k^*(x)\hat{e}_k(y)dk \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)}dk = \delta(x-y). \tag{۱۹۱}$$

بااین جایگزینی روابط قبلی یک به یک تغییرمی کنند. نخست به رابطه (184) نگاه می کنیم: ازآنجا که شاخص n جای خود را به یک شاخص پیوسته $k = \frac{2\pi n}{L}$ داده است این رابطه به صورت زیردرمی آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x)\frac{\Delta n}{\Delta k}\Delta k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x)\frac{L}{2\pi}\Delta k = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k)\hat{e}_k(x) \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)dk. \qquad (۱۹۲)$$

که درآن $\sqrt{\frac{L}{2\pi}}f_n =: \hat{f}(k)$. ازرابطه بالا می توانیم باتوجه به رابطه (185)، $\hat{f}(k)$ را برحسب $f(x)$ بدست آورد:

$$\hat{f}(k) \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx. \qquad (۱۹۳)$$

جفت روابطِ

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)dk \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx. \end{aligned} \qquad (۱۹۴)$$

رایک تبدیل فوریه درفضای توابع یک متغیره می گویند. این روابطه به صورت زیر به فضای n بعدی تعمیم می یابند.

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\cdot x}\hat{f}(k)d^nk \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\cdot x}f(x)d^nx. \end{aligned} \qquad (۱۹۵)$$

۱۶ تمرین ها:

.

۱ ـ تجزیه قطبی ماتریسِ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ را بدست آورید.

۲ ـ تجزیه مقدار منفرد ماتریسِ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ را بدست آورید.

۳ ـ یک ماتریس روی ضرب تانسوری دو فضای دوبعدی به صورت زیر تعریف شده است:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}. \qquad (۱۹۶)$$

رد های جزئی این عملگر را بدست آورید.

۴ ـ در یک فضای d بعدیِ V که بردارهای پایه اش را با $\{|j\rangle, j = 0, 1, \cdots d-1\}$ نشان می دهیم عملگرهای X و Z به صورت زیر تعریف می شوند:

$$X|j\rangle := |j+1\rangle \mod d, \qquad Z|j\rangle := \omega^j|j\rangle \qquad (۱۹۷)$$

که درآن $\omega := e^{\frac{2\pi i}{d}}$.

الف: ویژه بردارهای عملگرهای X ، Z و XZ را بدست آورید.

ب: نشان دهید که $ZX = \omega XZ$.

ج: طیف عملگر $X + X^{-1}$ را بدست آورید.

د: حالت های زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi_{m,n}\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_j \omega^{jn} |j, j+m\rangle \qquad (۱۹۸)$$

و نشان دهید که این حالت ها یک پایه متعامد بهنجار برای فضای $V \otimes V$ می سازند. هم چنین نشان دهید که برای همه این حالت ها تساوی زیر برقراراست:

$$tr_V(|\phi_{m,n}\rangle\langle\phi_{m,n}|) = \frac{1}{d} I. \qquad (۱۹۹)$$

این حالت ها، حالت های تعمیم یافته بل[1] نامیده می شوند.

[1] Generalized Bell States